Correction DM n° 10.

Exercice 1

① $P(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$

$= ax^2 - a(\alpha_1+\alpha_2)x + a\alpha_1\alpha_2$

Par identification : $-a(\alpha_1+\alpha_2) = b$

$a\alpha_1\alpha_2 = c$

$$\boxed{\text{Donc} \quad \alpha_1+\alpha_2 = -\frac{b}{a} \qquad \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a}}$$

② $P(\alpha_1) = \alpha_1^2 - (\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2$

$= \alpha_1^2 - \alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2$

$= 0$

$P(\alpha_2) = \alpha_2^2 - (\alpha_1+\alpha_2)\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2$

$= \alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2 = 0$

Donc $\boxed{\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ sont des racines de } P.}$

③ 1 est une solution évidente car $2\times 1^2 - 5\times 1 + 3 = 0$.

④ $\alpha_1+\alpha_2 = \frac{-(-5)}{2} = \frac{5}{2}$ $\quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{3}{2}$

⑤ On déduit que la seconde solution est $3/2$.

Exercice 2

① Y_n est le nombre de n-chaînes de "pile" obtenues au cours des n lancers. Il ne peut y avoir que 0 ou 1 n-chaine.

$Y_n(\Omega) = \{0;1\}$.

Le seul moyen d'avoir une n-chaine de "pile" est d'avoir n-pi[les] à la suite

$P(Y_n = 1) = p^n$

Ainsi $\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^n) \text{ (Loi de Bernoulli de paramètre } p^n)}$

$\boxed{E(Y_n) = p^n}$

② Y_{n-1} est le nombre de $n-1$-chaînes de "pile"

$Y_{n-1}(\Omega) = \{0;1\}$.

Pour l'évènement $Y_{n-1} = 1$, il y a 2 possibilités :

$F\underbrace{PP\ldots P}_{n-1 \text{ piles}}$ ou $\underbrace{P\ldots P}_{n-1 \text{ piles}}F$

La probabilité de ces 2 évènements est $p^{n-1}q$.

Ainsi $\boxed{P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}}$ $\boxed{E(Y_{n-1}) = 2qp^{n-1}}$

③ (a) $X_{1,k} = 1$ si il y a k piles pour commencer ~~et~~ face et n'importe quel autres tirages ensuite.

Ainsi $\boxed{P(X_{1,k} = 1) = qp^k}$

(b) Soit $i \in [\![2; n-k]\!]$. Pour avoir $X_{i,k} = 1$, il faut un Face au $(i-1)$ème tirage, k Pile puis 1 Face au $(i+k)$ème tirage.

On a donc $P(X_{i,k} = 1) = P(**\ldots F\underbrace{P\ldots P}_{k \text{ Pile}}F**\ldots) = q^2p^k$.

(c) Pour avoir $X_{n-k+1,k} = 1$, il faut 1 Face au $(n-k)$ème tirage puis k piles donc $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.

(d) $\boxed{Y_k = \sum_{i=1}^{n-k+1} X_{i,k}}$ donc $E(Y_k) = E(X_{1,k}) + \sum_{j=2}^{n-k} E(X_{j,k}) + E(X_{n-k+1,k})$.

$= 2qp^k + \sum_{j=2}^{n-k} q^2p^k = \boxed{2qp^k + (n-k-1)q^2p^k}$

Exercice 3.

1 (a) f_n est dérivable en tant que quotient et somme de fonctions dérivables :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_n'(x) = \frac{-e^x}{1+e^x} + n.}$$

f_n' est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n''(x) = \frac{-e^x(1+e^x) - e^x \times (-e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$\boxed{f_n''(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}}$$

(b) On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n''(x) < 0$, f_n' est donc strictement décroissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f_n'	n	$n-1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_n'(x) = n$.

$f_n'(x) = \dfrac{-e^x}{e^x(e^{-x}+1)} + n$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n'(x) = n-1$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n' est positive (strictement).

$\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

(2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} nx = -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} nx = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

(3) (a) La fonction f_n est :

- continue sur $\mathbb{R}$.
- Strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

D'après le théorème de la bijection, $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée u_n.

(b) $f_n(u_n) = 0 \iff \dfrac{1}{1+e^{u_n}} + n u_n = 0$

$$\iff \quad u_n = -\frac{1}{n} \times \frac{1}{1+e^{u_n}}$$

Or $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1+e^{u_n}} > 0$ donc $u_n < 0$.

et $e^{u_n} > 0$

$\Rightarrow 1 + e^{u_n} > 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+e^{u_n}} < 1$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+e^{u_n}}\right) > -\dfrac{1}{n}$ donc $\boxed{-\dfrac{1}{n} < u_n < 0}$

(c) $\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

(d) On a $-2n u_n = \dfrac{2}{1+e^{u_n}}$ (d'après 3(b))

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{u_n} = 1$ (d'après 3(c)).

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{1+e^{u_n}} = 1$.

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} -2n u_n = 1}$.